Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное   
учреждение высшего профессионального образования

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Факультет информационных технологий математики и механики

**Отчет по лабораторной работе**

**Методы решения систем линейных уравнений**

**Выполнил**:студент группы 381606-1

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Кутовой В.Н.

Подпись

**Научный руководитель**:

к.ф.-м.н.,

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Эгамов А.И

Подпись

Нижний Новгород

2018

Содержание

[Введение 3](#_Toc532129232)

[Изложение методов 4](#_Toc532129233)

[Руководство пользователя 12](#_Toc532129234)

[Заключение 13](#_Toc532129235)

[Список литературы 14](#_Toc532129236)

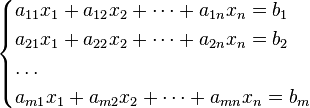
# Введение

Система линейных алгебраических уравнений (линейная система, также употребляются аббревиатуры СЛАУ, СЛУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является линейным — алгебраическим уравнением первой степени.

В классическом варианте коэффициенты при переменных, свободные члены и неизвестные считаются вещественными числами, но все методы и результаты сохраняются (либо естественным образом обобщаются) на случай любых полей, например, комплексных чисел.

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, линейные алгебраические уравнения и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях, в том числе в линейном программировании, эконометрике.

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:



Здесь — количество уравнений, а — количество переменных, — неизвестные, которые надо определить, коэффициенты и свободные члены предполагаются известными. Индексы коэффициентов в системах линейных уравнений формируются по следующему соглашению: первый индекс обозначает номер уравнения, второй — номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

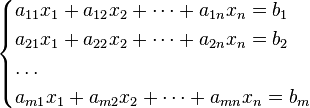
# Изложение методов

**Метод Гаусса**

## 

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

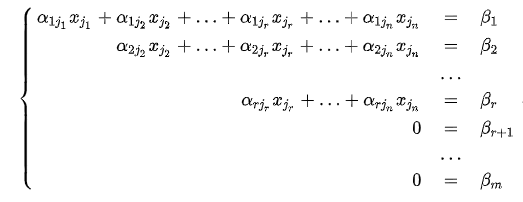
Пусть исходная система выглядит как общий вид СЛАУ:



Ее можно записать в матричном виде:

Где , ,

Тогда с помощью элементарных преобразований, матрицу можно привести к следующему виду:

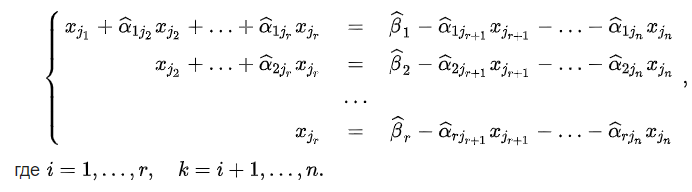


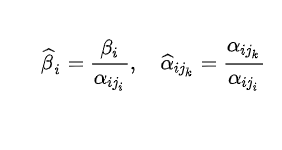
При этом будем считать, что базисный минор (ненулевой минор максимального порядка) основной матрицы находится в верхнем левом углу, то есть в него входят только коэффициенты при переменных .

Тогда переменные называются главными переменными. Все остальные называются свободными.

Если хотя бы одно число, где i > r, то рассматриваемая система несовместна, т.е. у неё нет ни одного решения.

Пусть для любых i > r. Приведем систему к следующему виду:



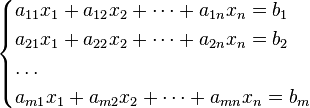


Если свободным переменным системы придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных снизу вверх (то есть от нижнего уравнения к верхнему), то мы получим все решения этой СЛАУ.

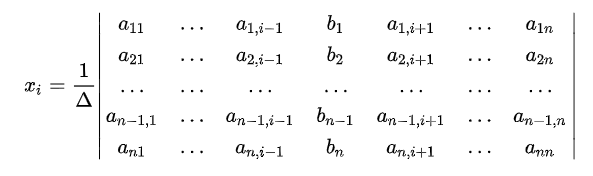
***Метод Крамера***

Метод Крамера — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Пусть исходная система выглядит как общий вид СЛАУ:



Пусть Δ – определитель матрицы системы, отличный от нуля, тогда решение записывается в виде



***LU-разложение***

LU-разложение — представление матрицы в виде произведения двух матриц, , где — нижняя треугольная матрица, а — верхняя треугольная матрица.

LU-разложение используется для решения систем линейных уравнений, обращения матриц и вычисления определителя.

Полученное LU-разложение матрицы (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами в правой части:

Если известно LU-разложение матрицы , , исходная система может быть записана как

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

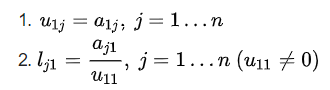
Поскольку — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

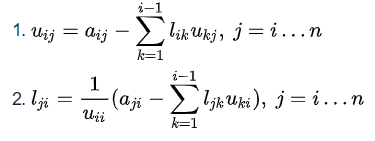
Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Рассмотрим алгоритм разложения. Будем использовать следующие обозначения для элементов матриц: .

Найти матрицы L и U можно следующим образом:



Для



В итоге получим искомые матрицы L и U.

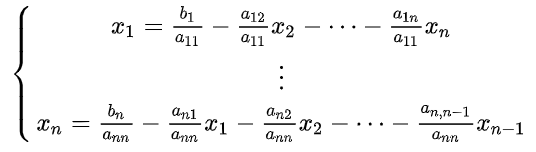
***Метод итерации***

Метод итерации — численный метод решения математических задач, приближённый метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным). Метод позволяет получить значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов (итерационный процесс).

Пусть исходная система записана в матричном виде:

Где , ,

Предполагая, что не равно 0, . Выразим через первое уравнение, — через второе и т. д



Обозначим , при ; при

,

В матричном виде получим . За нулевое приближение примем столбец свободных членов.

– нулевое приближение

– первое приближение

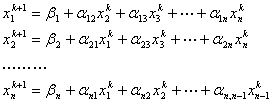
– второе приближение

***Метод Зейделя***

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении

-го приближения неизвестной учитываются уже вычисленные ранее -е приближения неизвестных

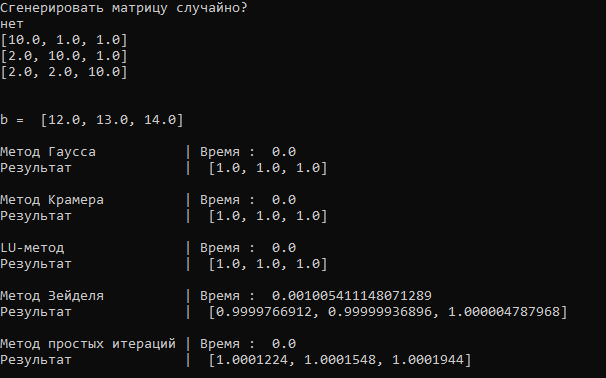
Выберем произвольно начальные приближения корней . Далее, предполагая, что k-ые приближения корней известны, согласно Зейделю будем строить -е приближения корней по формулам:



# Руководство пользователя

Для работы программы необходимо создать файл, у котором будет указана исходная матрица и столбец свободных членов или при запуске программы выбрать случайную генерацию матрицы и задать ее размер.

Пример работы программы:



# Заключение

Мне удалось выполнить поставленную задачу и реализовать методы решения СЛАУ. Анализируя результаты, полученные с помощью программ, можно сделать следующие выводы.

Метод Гаусса, Крамера и LU дает точное решение системы алгебраических уравнений, но требует перед своим применением дополнительные преобразования.

Количество итераций сильно зависит от матрицы А исходной системы уравнений вида Ax=b. Чем ближе диагональные элементы матрицы А к нулю, тем больше итераций требуется для того, чтобы решить исходную систему линейных алгебраических уравнений.

На количество шагов влияет начальное приближение. Чем оно ближе к точному решению, тем меньше требуется шагов для сходимости метода.

# Список литературы

* *А.А.Самарский.*  Введение в численные методы М.: Наука, 1982
* А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы М.: Наука, 1989
* Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов.
* http://www.wikipedia.org/